Rotačně symetrická plocha

$$g = \alpha^2 d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 \qquad \alpha(\rho)$$

$$R = -\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)_{,\rho} \frac{1}{\rho} \qquad \text{(předchozí cvičení)}$$

Konstantní záporná křivost

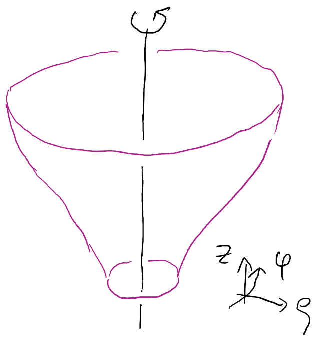
$$R = -\frac{2}{\ell^2} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{1}{\frac{\rho^2}{\ell^2} + K}$$

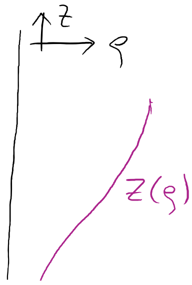
K integrační konstanta

Podmínka vnoření do E^3

$$\alpha^2 = 1 + z_{,\rho}^2$$

$z(\rho)$ charakterizuje rotační plochu





Různé typy souřadnic a vnoření

1) $K > 0 \qquad K = \frac{b^2}{\ell^2}$

2) $K = 0$

3) $K < 0 \qquad K = -\frac{\rho_0^2}{\ell^2}$

1) Polární souřadnice a kuželová plocha

$$K = b^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 = \frac{1}{\frac{\varrho^2}{\ell^2} + b^2}$$

podmínka vnoření

$$\alpha^2 = 1 + z_{,\varrho}^2 \quad \Rightarrow \quad z_{,\varrho} = \sqrt{\frac{1}{\frac{\varrho^2}{\ell^2} + b^2} - 1}$$

chování na ose $\varrho = 0$

$$z_{,\varrho}\big|_{\varrho=0} = \sqrt{\frac{1}{b^2} - 1} \quad \Rightarrow \quad 1 > b \stackrel{\text{def}}{=} \cos\beta$$

$$\Rightarrow z_{,\varrho}\big|_{\varrho=0} = \tan\beta \qquad\qquad z_{,\varrho} = \sqrt{\frac{\ell^2 \sin^2\beta - \varrho^2}{\ell^2 \cos^2\beta + \varrho^2}}$$

křivost $R<0$ se získává tím, že obvod kružnice $\varrho = \text{konst}$ roste se zvětšujícím se ϱ rychleji než pro euklidovskou rovinu

toho se dosahuje zahýbáním rotační křivky směrem od osy

$z_{,\varrho}$ tak musí s rostoucím ϱ klesat

vnoření funguje až do ϱ_{max}, kde $z_{,\varrho}\big|_{\varrho_{max}} = 0$

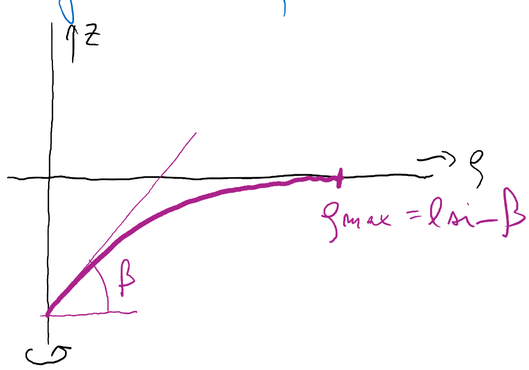
$$z_{,\varrho}\big|_{\varrho_{max}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varrho_{max} = \ell \sin\beta$$

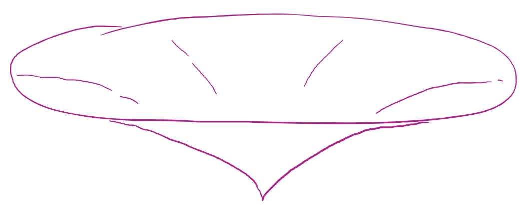
vnořená plocha je tak definována pro

$$\varrho \in (0, \ell \sin\beta)$$

$$z = \int \sqrt{\frac{\ell^2 \sin^2\beta - \varrho^2}{\ell^2 \cos^2\beta + \varrho^2}}\, d\varrho$$

(eliptický integrál)





metrika

nové souřadnice r, ψ

$$\varrho = b\ell \,\mathrm{sh}\frac{r}{\ell} \qquad \psi = b\varphi$$

$$\Downarrow \quad \alpha^2 = \frac{1}{b^2\,\mathrm{ch}^2\frac{r}{\ell}} \qquad d\varrho = b\,\mathrm{ch}\frac{r}{\ell}\,dr$$

$$\Downarrow \quad g = dr^2 + \ell^2\,\mathrm{sh}^2\frac{r}{\ell}\,d\psi^2$$

$r \in (0,\infty)$ obecně $\qquad r \in (0, r_{max})$ vnořitelné

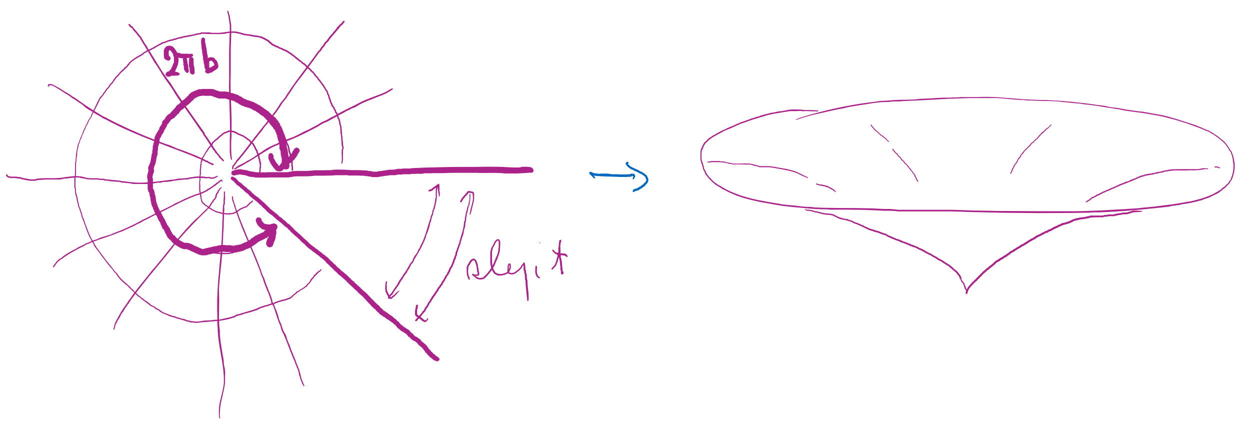
$\psi \in (0, 2\pi b)$ "periodická" souřadnice

pro $b=1$ se jedná o polární souřadnice v Lobačevského rovině

tento případ ale není vnořitelný

$$b=1 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \varrho_{max} = 0$$

pro $b<1$ se jedná o Lobačevského kužel, který vznikne vyříznutím klínu o úhlu $2\pi b$ a slepením ho do kužele



3) Axiální souřadnice a válcová plocha

$$K = -\frac{\varrho_0^2}{l^2} < 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 = \frac{l^2}{\varrho^2 - \varrho_0^2}$$

podmínka vnoření

$$\alpha^2 = 1 + z_{,\varrho}^2 \quad \Rightarrow \quad z_{,\varrho} = \sqrt{\frac{l^2 + \varrho_0^2 - \varrho^2}{\varrho^2 - \varrho_0^2}}$$

chování pro $\varrho = \varrho_0$

$$z_{,\varrho}\big|_{\varrho=\varrho_0} \to \infty$$

opět $z_{,\varrho}$ musí pro rostoucí ϱ klesat $\Rightarrow$

$$\varrho \in (\varrho_0, \varrho_{max})$$

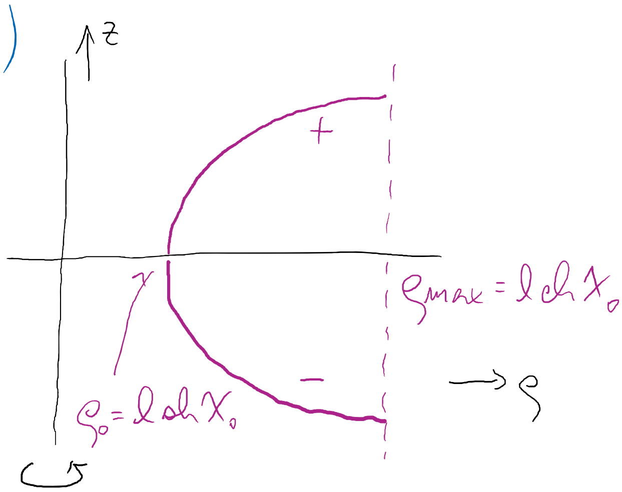
$$z_{,\varrho}\big|_{\varrho=\varrho_{max}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varrho_{max} = \sqrt{\varrho_0^2 + l^2}$$

zavedeme alternativní parametr χ_0

$$\varrho_0 = l\,\mathrm{sh}\,\chi_0 \qquad \varrho_{max} = l\,\mathrm{ch}\,\chi_0$$

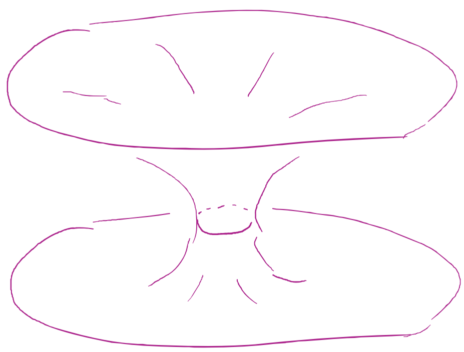
vnořená plocha je tak definována pro

$$\varrho \in (\varrho_0, \varrho_{max}) = (l\,\mathrm{sh}\,\chi_0, l\,\mathrm{ch}\,\chi_0)$$



$$z = \pm \int_{\varrho_0}^{\varrho} \sqrt{\frac{l^2\mathrm{ch}^2\chi_0 - \varrho^2}{\varrho^2 - l^2\mathrm{sh}^2\chi_0}}\, d\varrho$$

eliptický integrál



metrika

nové souřadnice ξ, ζ

$$\rho = \rho_0 \operatorname{ch} \frac{\xi}{l} \qquad \zeta = \rho_0 \varphi$$

$$\Downarrow \quad \alpha^2 = \frac{l^2}{\rho_0^2 \operatorname{sh}^2 \frac{\xi}{l}} \qquad d\rho = \frac{\rho_0}{l} \operatorname{sh} \frac{\xi}{l}\, d\xi$$

$$\Downarrow \quad g = d\xi^2 + \operatorname{ch}^2 \frac{\xi}{l}\, d\zeta^2$$

$\xi \in (0,\infty)$ obecné $\xi \in (0, \xi_{max})$ vnořitelné

lze rozšířit i pro $\xi < 0$ - odpovídá $z<0$

$\zeta \in (0, 2\pi\rho_0)$ "periodické" souřadnice

- pro $\xi \in \mathbb{R}$ $\zeta \in \mathbb{R}$ se jedná o celou Lobačevského rovinu
  - $\xi = 0$ je osa ξ je vzdálenost od osy
  - $\xi = konst$ jsou ekvidistanty
  - $\zeta = konst$ jsou přímky (geodetiky)
  - $\frac{\partial}{\partial \zeta}$ je Killingův vektor
- pro $\xi \in (-\xi_{max}, \xi_{max})$ $\zeta \in (0, 2\pi\rho_0)$ se jedná o vnořenou Lobačevského válcovou plochu získanou vyříznutí pásu $\zeta \in (0, 2\pi\rho_0)$ a ztotožnění $\zeta = 0 \leftrightarrow \zeta = 2\pi\rho_0$

  oříznutí $\xi \in (-\xi_{max}, \xi_{max})$ je dáno vnořitelností do E^3